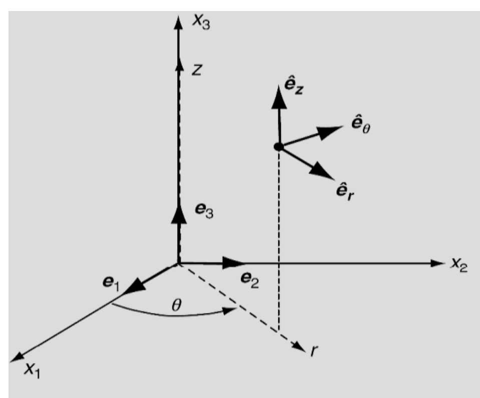
۱-۸: مختصات خمیده‌خط Curvilinear Coordinates

در بسیاری از مسائل مکانیکی، می‌باید از دستگاه‌های خمیده‌خط استفاده کرد. در این قسمت دو دستگاه مختصات خمیده‌خط متعامد پرکاربرد بررسی می‌شوند.

Cylindrical Coordinates (r,θ,z)



$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{x_2}{x_1} \\ z = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_r = \cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2 \\ \hat{e}_z = \hat{e}_3 \end{cases}$$

$$\text{position } \vec{R} = x_i\hat{e}_i = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$$
$$\vec{R} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$$

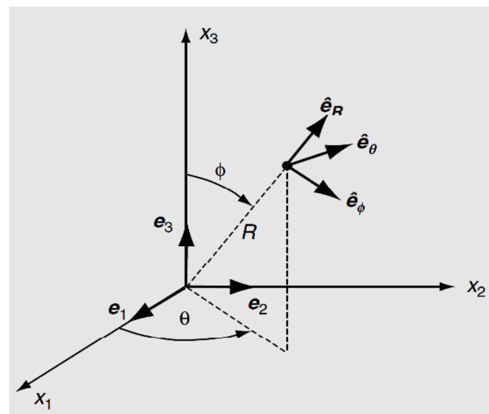
$$\begin{cases}\hat{e}_r = \cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2 \\ \hat{e}_z = \hat{e}_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d\hat{e}_r = \left(-\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2\right)d\theta \rightarrow d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta \\ d\hat{e}_\theta = \left(-\cos\theta\hat{e}_1 - \sin\theta\hat{e}_2\right)d\theta \rightarrow d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r \\ d\hat{e}_z = d\hat{e}_3 = 0\end{cases}$$

$$\vec{R} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$$

$$d\vec{R} = d\left(r\hat{e}_r\right) + d\left(z\hat{e}_z\right) = dr\hat{e}_r + rd\hat{e}_r + dz\hat{e}_z \Rightarrow d\vec{R} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + dz\hat{e}_z$$

Spherical Coordinates (R, θ, ϕ)

$$\begin{cases}x_1 = R\cos\theta\sin\phi \\ x_2 = R\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = R\cos\phi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{x_2}{x_1} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\end{cases}$$



$$\begin{Bmatrix}\hat{e}_R \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\hat{e}_R = \cos\theta\sin\phi\hat{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{e}_2 + \cos\phi\hat{e}_3 = \sin\phi\left(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2\right) + \cos\phi\hat{e}_3 \\ \hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2 \\ \hat{e}_\varphi = \cos\theta\cos\phi\hat{e}_1 + \sin\theta\cos\phi\hat{e}_2 - \sin\phi\hat{e}_3 = \cos\phi\left(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2\right) - \sin\phi\hat{e}_3\end{cases}$$

$$position\ \vec{R} = x_i\hat{e}_i = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$$

$$\vec{R} = R\hat{e}_R$$

$$\hat{e}_R = \sin\phi\left(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2\right) + \cos\phi\hat{e}_3$$

$$d\hat{e}_R = \cos\phi\left(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2\right)d\phi + \sin\phi\left(-\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2\right)d\theta - \sin\phi d\phi\hat{e}_3$$

$$d\hat{e}_R = \left[\cos\phi\left(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2\right) - \sin\phi\hat{e}_3\right]d\phi + \sin\phi\left(-\sin\theta\hat{e}_1 + \cos\theta\hat{e}_2\right)d\theta$$

$$\Rightarrow d\hat{e}_R = \sin\phi d\theta\hat{e}_\theta + d\phi\hat{e}_\phi$$

$\vec{R} = R\hat{e}_R$

$d\vec{R} = dR\hat{e}_R + Rd\hat{e}_R = dR\hat{e}_R + R\left(\sin\phi d\theta\hat{e}_\theta + d\varphi\hat{e}_\varphi\right) \Rightarrow d\vec{R} = dR\hat{e}_R + R\sin\phi d\theta\hat{e}_\theta + Rd\phi\hat{e}_\phi$

۱-۸-۱: تبدیل مختصات Transformation of Coordinates

دو دستگاه مختصات متعامد، درصورتی به یکدیگر تبدیل می‌شوند که ژاکوبین تبدیل صفر نباشد.

x_i *cartesian coordinates*

q_i *carvilinear coordinates*

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right| \neq 0, \infty$$

مثال: امکان تبدیل مختصات بین دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی را با دستگاه کارتزین بررسی نمایید.

حلّ:

$$(r,\theta,z)\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = z \end{cases} \& \begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \quad , \quad r \neq 0$$

$$(R,\theta,\phi)\begin{cases} q_1 = R \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \phi \end{cases} \& \begin{cases} x_1 = R\cos\theta\sin\phi \\ x_2 = R\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = R\cos\phi \end{cases}$$

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -R\sin\theta\sin\phi & R\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & R\cos\theta\sin\phi & R\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -R\sin\phi \end{vmatrix} = -R^2\sin^3\phi - R^2\sin\phi\cos^2\phi$$

$$J = -R^2\sin\phi \qquad R \neq 0 \ , \ \phi \neq 0, \pi$$

درصورت امکان تبدیل مختصات، رابطه‌ی بین دو دستگاه به کمک ضرایب مقیاس (scale factors) ایجاد می‌شود.

$$\vec{R} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 \rightarrow \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_1}{\partial q_i}\hat{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_i}\hat{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\hat{e}_3 = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\hat{e}_j$$

$$\text{Scale factors} \quad h_i = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}$$

مثال: ضرایب مقیاس دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی را به‌دست آورید.

حلّ:

$$cylindrical\ (r,\theta,z)\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_r = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \\ h_\theta = \sqrt{(-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2} = r \\ h_z = 1 \end{cases}$$

$$spherical\ (R,\theta,\phi)\begin{cases} x_1 = R\cos\theta\sin\phi \\ x_2 = R\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = R\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_R = \sqrt{(\cos\theta\sin\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2} = 1 \\ h_\theta = \sqrt{(-R\sin\theta\sin\phi)^2 + (R\cos\theta\sin\phi)^2} = R\sin\phi \\ h_\varphi = \sqrt{(R\cos\theta\cos\phi)^2 + (R\sin\theta\cos\phi)^2 + (-R\sin\phi)^2} = R \end{cases}$$

به کمک ضرایب مقیاس، می‌توان روابط مختلف در دستگاه مختصات خمیده‌خط را نوشت.

$\hat{e}_i$ یکّه‌بردار دستگاه کارتزین و $\hat{\bar{e}}_i$ یکّه‌بردار دستگاه خمیده‌خط می‌باشند.

$$\hat{\bar{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\hat{e}_j \quad no\ sum\ on\ i$$

روابط دیفرانسیلی در دستگاه مختصات خمیده‌خط متعامد:

$$d\vec{R} = h_1 dq_1 \hat{\bar{e}}_1 + h_2 dq_2 \hat{\bar{e}}_2 + h_3 dq_3 \hat{\bar{e}}_3$$

$$operator\ \vec{\nabla} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\hat{\bar{e}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\hat{\bar{e}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\hat{\bar{e}}_3$$

$$gradf = \vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\hat{\bar{e}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\hat{\bar{e}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\hat{\bar{e}}_3$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 V_3)\right]$$

$$curl\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\bar{e}}_1 & h_2\hat{\bar{e}}_2 & h_3\hat{\bar{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

$$lapf = \nabla^2 f = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]$$

تمرین: عملگرهای دیفرانسیلی چهارگانه را در مختصات استوانه‌ای و کروی را به‌دست آورید.